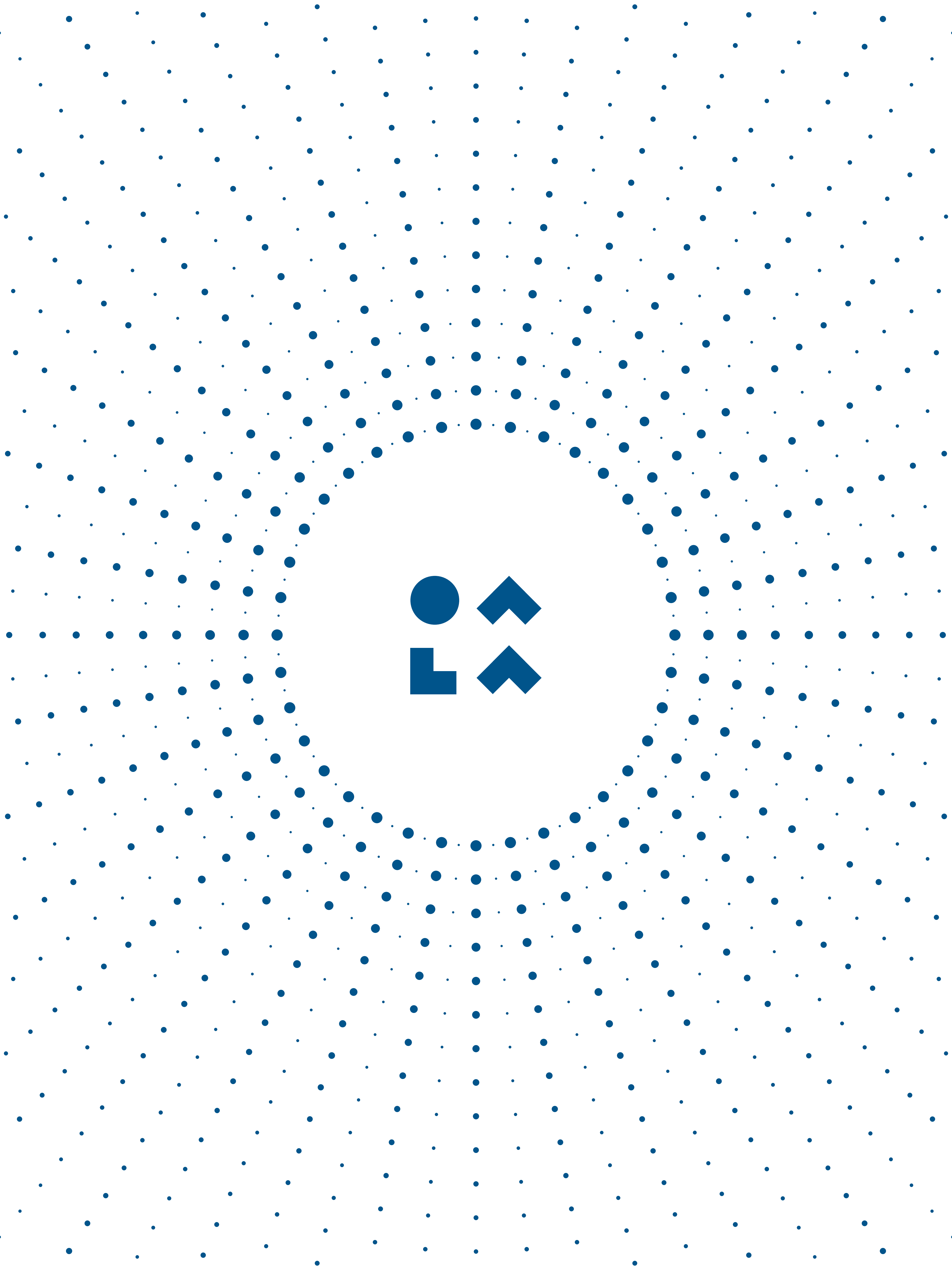


약술형 논술 전형이란?

구분	약술형 논술	일반 논술
연계교재	EBS 수능 연계교재 및 교과서 기반 출제	별도 연계교재 없음
출제범위	수학Ⅰ, Ⅱ 또는 수학Ⅰ, Ⅱ + 국어 일부 대학교 수학Ⅰ, Ⅱ, 미적분 포함	고등학교 교육과정 전 범위 학교따라 상이
문제 난이도	수능 2점 ~ 3점 수준 중하~중상 난이도	수능 4점 준킬러 이상 고난도 중심
학습 난이도	수능 학습과 병행 가능 학습 부담 낮은 편	대학별 편차 크며 전반적으로 높은 편
답안 작성	단답형, 약술형 혼합 핵심 개념 및 풀이 과정 간결 서술	논술형 (장문 서술) 논리적 근거와 주장 포함
내신 반영	논술 100% 반영 — 내신 성적 미반영 일부 대학교 내신 10~20% 반영	대학별 전형 방법에 따라 상이

약술형 논술 전형의 3가지 핵심

내신 무관 전형

내신 등급에 관계없이 약술형 논술 시험 결과만으로 합격이 결정됩니다.
(가천대 · 국민대 기준)

수능 최저 충족자 간의 경쟁

수능 최저 미충족자는 시험 전 불합격 처리되며,
실제 경쟁은 최저 충족자 집단 내에서만 이루어집니다.

준비 방법의 차별성

채점 방식에 부합하지 않는 일반 문제풀이식 학습이나
EBS 숫자 변형 반복 학습은 약술형에 적합하지 않습니다.

채점 방식 핵심 포인트

답만으로는 불충분

최종 답과 함께 핵심 개념·원리를 간결하게 서술해야 점수를 받을 수 있습니다.

핵심 키워드 중심 채점

최종 답이 틀리더라도 풀이 과정의 핵심 키워드가 포함되면
부분 점수 획득이 가능합니다.

간결 · 정확한 서술

장문 서술보다 필수 개념과 풀이 흐름을 정확하고 간결하게
표현하는 훈련이 요구됩니다.

씨에스엠 약술형 논술

“ 단순 문제 풀이가 아닌, 채점 기준과 서술 방식을 함께 학습하는
약술형 논술 전문 커리큘럼입니다.

가천대 · 상명대 · 서경대 · 삼육대 약술형 논술을 위한
수학 유형서(수학 I / 수학 II)부터 시즌 모의고사 · 파이널 모의고사까지,

합격을 위한 모든 과정을 한 번에 제공합니다. ”

116개 유형

수학 I · II 전 범위를 116개 유형으로 분류하고 총 450문항으로 빠짐없이 학습합니다.

학교별 기출 수록

가천대 등 주요 대학의 실제 기출문제를 유형별로 분류하여 수록하였습니다.

EBS 연계

EBS 수특 변형 문항과 기출 문항을 균형 있게 수록하여 실전 감각을 극대화합니다.

채점 기준

모든 문항에 실제 채점 기준에 근거한 배점표와 서술 방향을 함께 제공합니다.

실전 모의고사

시즌별 난이도 차등 설계와 실전형 파이널 모의고사로 실제 시험 대비를 완성합니다.

해설강의

모의고사 전 문항 해설강의를 제공하여 혼자서도 충분한 학습이 가능합니다.

약술형 논술 로드맵

유형서

- 채점 기준 이해
- 서술 방식 학습
- 116유형 450문항

시즌 모의고사

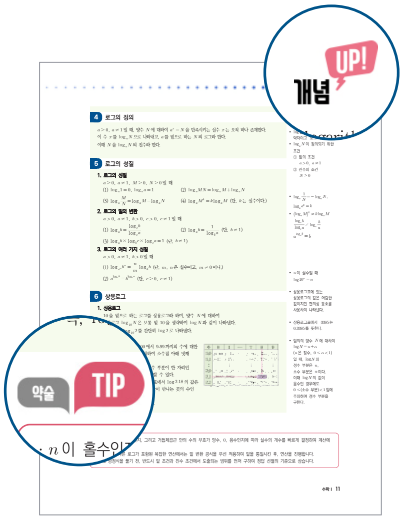
- 시즌별 난이도 차등
- 실전 서술 훈련
- 해설강의 제공

파이널 모의고사

- 실제 시험 환경 대비
- 시간 배분 전략 완성
- 해설강의 제공

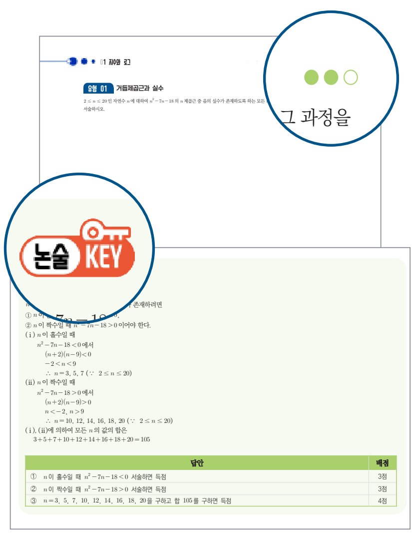
수학유형서

1 개념 + 유형



- 약술형 논술에 자주 출제되는 핵심 개념을 단원별로 압축 정리하여 수록하였습니다.
- 개념 UP! 코너를 통해 놓치기 쉬운 심화 개념과 주의 사항을 별도로 제시합니다.
- 약술 TIP 으로 채점 기준에 맞는 서술 방향과 핵심 키워드 선별 기준을 직접 안내합니다.
- 수학Ⅰ · Ⅱ 전 범위를 116개 유형으로 체계적으로 분류하여, 출제 가능한 모든 유형을 빠짐없이 학습할 수 있도록 구성하였습니다.

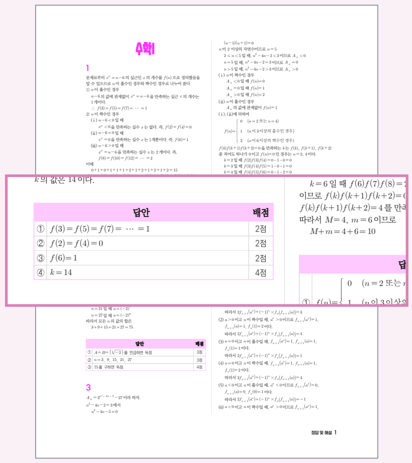
2 대표유형문항



116문항 (대표 유형 문항)	+	334문항 (유형 반복 문항)	총 450문항

- 각 유형별 난이도별 2~4문항을 수록하여 반복 학습을 통한 서술 방식의 완전 체화를 목표로 합니다.
- 문항마다 난이도 표시(●)를 제공하여 학습자 스스로 수준에 맞는 단계별 학습이 가능합니다.
- 각 유형별 대표 문항과 논술 KEY 해설을 함께 제공하여, 풀이 방향과 서술 흐름을 한눈에 파악할 수 있습니다.
- 실제 채점 기준에 근거한 배점표를 문항마다 수록하여, 반드시 서술해야 할 내용을 명확하게 제시합니다.
- 실전 감각을 높이는 기출문제와 출제 경향을 반영한 EBS 변형 문항 및 자체 제작 문항을 균형 있게 배치하였습니다.

3 해설



- 모든 문항에 채점 기준표와 배점표를 수록하여, 단순 정답 확인을 넘어 감점 원인까지 스스로 점검할 수 있습니다.
- 단계별 풀이 방식으로 서술하여, 약술형 답안에서 요구되는 논리적 전개 순서와 표현 방식을 자연스럽게 익힐 수 있습니다.

실전 모의고사

가천대
(시험지 + 답안지 + 복습 & 해설지)

국민대
(시험지 + 답안지 + 복습 & 해설지)

출시일정

6월	7월	8월	9월	10월	11월
수학 유형서	**시즌 모의고사**				**파이널 모의고사**
씨에스엠 약술형 논술 수학유형서	가천대 시즌1	가천대 시즌2	가천대 시즌3 국민대 시즌1	가천대 시즌4	가천대 파이널 국민대 파이널

기출 완벽 분석 기반의 전략적 문제 구성

단순히 기출문제를 나열하는 것을 넘어, 자주 출제된 유형과 아직 출제되지 않은 잠재적 출제 유형을 균형 있게 배치하였습니다. 각 회차 내에서는 단원과 유형을 고르게 분포하고, 한 시즌(4회차) 전체에 걸쳐 유형이 최대한 중복되지 않도록 정밀하게 설계하여 빠짐없이, 편중 없이 학습할 수 있습니다.

시즌별 난이도 차등 설계로 실력의 완성

기초 다지기부터 실전 대비까지, 시즌마다 난이도를 단계적으로 차등 구성하였습니다. 쉬운 문제로 개념을 확인하고, 어려운 문제로 실전 감각을 키우는 체계적인 난이도 로드맵을 통해 수험생의 실력이 자연스럽게 성장할 수 있도록 하였습니다.

실제 채점 기준에 최적화된 모범 답안 & 배점표 제공

"어떻게 써야 점수를 받는가?" 에 대한 명확한 해답을 제시합니다. 실제 채점 기준에 맞춘 완벽한 서술 방향과 함께, 각 항목별 합리적인 배점 근거를 상세히 제공하여 채점자의 눈으로 내 답안을 점검하고 교정할 수 있습니다.

전략적 시간 관리 & 실전 서술 감각을 잡아주는 전문 인강 제공

아는 것과 시험장에서 쓰는 것은 다릅니다. 제한된 시험 시간 안에 어떻게 논리를 전개하고, 어떤 흐름으로 답안을 작성해야 하는지 실전에서 바로 통하는 서술 전략과 시간 배분법을 전문 인강을 통해 명확하게 제시합니다.

26학년도 씨에스엠 약술형 논술

합격생 후기

가천대

2026학년도 합격생

잘 정리된 핵심 내용과 반복 학습 구조로 실력 향상을 경험했습니다.

모의고사 해설에 중요한 포인트가 잘 정리되어 있어서 무엇을 꼭 써야 하는지 알기 쉬웠습니다.
회차별 난이도가 점점 올라가서 점차적으로 실력을 키울 수 있었고, 문제를 3번씩 풀어보게 되어 있어 어려운 문제에도 자연스럽게 적응했습니다.

가천대 간호학과

2026학년도 합격생

시간 배분 훈련을 할 수 있었고, 사고 과정이 올바른지 점검할 수 있었습니다.

가천대 약술 논술에서 쓰는 표현과 답안 작성 방식은 기출로 파악했지만, 적용할 모의고사가 없어 불안했습니다.
CSM17 모의고사로 실전 시간 배분 훈련을 할 수 있었고, 답을 내는 과정에서 내 사고 과정이 올바른지 여러 문제로 점검할 수 있었습니다.

가천대 경영학과

2026학년도 합격생

유형서로 서술 방식을 체화하고 모의고사로 실전 감각을 형성했습니다.

수능 공부와 병행하면서 약술 논술까지 챙기는 게 걱정이었는데, 유형서로 먼저 서술 방식을 익히고 모의고사로 실전 연습을 하는 흐름이 잘 맞았습니다. 특히 배점표가 세세하게 나뉘어 있어서 어떤 표현을 써야 점수를 받는지 감이 생겼고, 시험장에서도 당황하지 않고 배운 대로 쓸 수 있었습니다.

검수진

강상윤	스카이미래연 중계	**박민현**	정자동 이강학원	**이성용**	목동 수학의원리학원
권기발	클래스원수학	**박성현**	메티스수학학원	**이수진**	538수학학원
권순원	PGA 오목관	**배재형**	하이엠수학학원 종로평창점	**이시후**	수학을 채우다
김민설	카이스트MS수학과학	**백주인**	PoM수학	**이종남**	인천 송도 새로이수학학원
김선진	데까르트 수학학원	**서미란**	파이데이아학원	**이종민**	인천 DnS 수학학원
김세준	SMC수학학원	**서태석**	목동 PGA	**장현준**	데까르트 수학학원
김승원	중계학림 영통이강	**설세령**	뉴파인 용산중고등관	**정성모**	수이학원
김아름	정바다수학	**성준우**	한국창의예술고등학교	**정훈석**	마포 시너스학원
김연제	압구정 메이드학원	**손아현**	모드수학논술학원	**조성길**	성남진학학원
김원표	목동 차이수학	**송도현**	동탄수학의숲	**조우영**	위드유수학학원
김재연	1pick_math	**송유이**	각인학원	**조현탁**	전문가집단
김진원	부산개성중학교	**신영수**	대영수학학원	**지용성**	영어세상미래수학
김창규	대치학당학원	**신재광**	그레이드원	**진명화**	에스플래닝
김혜영	프라임수학	**신지현**	서초명인학원	**진혜원**	더올라수학
김효상	부산 코스터디학원	**신현우**	본엘리트 고등2관	**최성문**	파이온 수학학원
나효명	열린아카데미	**안보현**	더진심학원	**한승우**	개념상상SM
모리	수학을 권하다	**안재근**	대치명인학원	**한태인**	이투스 네오
문대승	열성수학학원	**양태혁**	해밀아카데미	**한호빈**	우독학원
박래혁	대치에스학원, 인재의창	**오영훈**	새로이수학학원	**허한솔**	예일학원

CONTENTS

수학 Ⅰ

1. 지수함수와 로그함수

2. 삼각함수

3. 수열

수학 Ⅱ

1. 함수의 극한과 연속

2. 미분

3. 적분

I

수학 I

01 지수와 로그

1 거듭제곱과 거듭제곱근

1. 거듭제곱

실수 a와 자연수 n에 대하여 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 하고, a^n으로 나타낸다. 이때 a, a^2, a^3, $\cdots$, a^n, $\cdots$ 을 통틀어 a의 거듭제곱이라 하고, a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 거듭제곱의 지수라 한다.

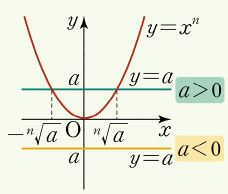
2. 거듭제곱근

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$의 근 x를 a의 n제곱근이라 한다. 이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, $\cdots$ 을 통틀어 a의 거듭제곱근이라 한다.

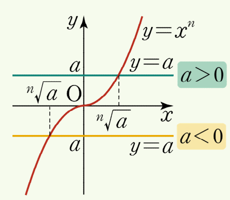
3. 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수

n이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

(1) n이 짝수일 때



(2) n이 홀수일 때



이상에서 n이 2 이상의 자연수일 때

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

개념 UP!

- 0이 아닌 실수 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개가 있다.
- $\sqrt[n]{a}$는 'n제곱근 a'라고 읽는다. 또한 $\sqrt[2]{a}$는 간단히 $\sqrt{a}$로 나타낸다.
- n이 홀수일 때 $\sqrt[n]{a}$의 부호는 a의 부호와 같다.

2 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$

(2) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(4) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(6) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 2 이상의 자연수이다.)

- $\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{b}}$
- 거듭제곱근의 대소 관계
  $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때
  $a>b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

3 지수의 확장

1. 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\neq0$이고 n이 자연수일 때

① $a^0=1$　　② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

2. 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$이고 m, n $(n\geq2)$가 정수일 때

① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$　　② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$

3. 지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$　　② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$　　④ $(ab)^x=a^xb^x$

- 밑이 0인 경우, 즉 0^0, 0^{-n}은 정의하지 않는다.
- 지수가 정수가 아닌 유리수인 경우에는 밑이 양수일 때에만 정의되므로 밑이 음수이면 지수법칙을 적용할 수 없다.

4 로그의 정의

$a>0$, $a\neq 1$일 때, 양수 N에 대하여 $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.
이 수 x를 $\log_a N$으로 나타내고, a를 밑으로 하는 N의 로그라 한다.
이때 N을 $\log_a N$의 진수라 한다.

5 로그의 성질

1. 로그의 성질

$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$ (2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ (4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수이다.)

2. 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$일 때

(1) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ (2) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq 1$)

(3) $\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1$ (단, $b\neq 1$)

3. 로그의 여러 가지 성질

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$일 때

(1) $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고, $m\neq 0$이다.)

(2) $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq 1$)

6 상용로그

1. 상용로그

10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하며, 양수 N에 대하여
상용로그 $\log_{10}N$은 보통 밑 10을 생략하며 $\log N$과 같이 나타낸다.
예를 들어 $\log_{10}2$를 간단히 $\log 2$로 나타낸다.

2. 상용로그표

0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 표이다.
상용로그표를 이용하면 정수 부분이 한 자리인 양수의 상용로그의 값을 구할 수 있다.
예를 들어 오른쪽 상용로그표에서 $\log 2.18$의 값은 2.1의 가로줄과 8의 세로줄이 만나는 곳의 수인 0.3385이다.
즉, $\log 2.18=0.3385$이다.

수	0	1	⋯	7	8	9
1.0	.0000	.0043	⋯	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	⋯	.0682	.0719	.0755
⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮
2.0	.3010	.3032	⋯	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	⋯	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	⋯	.3560	.3579	.3598

개념 UP!

- log는 logarithm의 약자이고 '로그'라 읽는다.
- $\log_a N$이 정의되기 위한 조건
① 밑의 조건
$a>0$, $a\neq 1$
② 진수의 조건
$N>0$

- $\log_a \frac{1}{N}=-\log_a N$, $\log_a a^k=k$
- $(\log_a M)^k\neq k\log_a M$
$\frac{\log_c b}{\log_c a}\neq\log_c \frac{b}{a}$
$a^{\log_a b}=b$

- n이 실수일 때
$\log 10^n=n$

- 상용로그표에 있는 상용로그의 값은 어림한 값이지만 편의상 등호를 사용하여 나타낸다.

- 상용로그표에서 .3385는 0.3385를 뜻한다.

- 임의의 양수 N에 대하여 $\log N=n+\alpha$ (n은 정수, $0\leq\alpha<1$) 일 때, $\log N$의 정수 부분은 n, 소수 부분은 α이다.
이때 $\log N$의 값이 음수인 경우에도 $0\leq$(소수 부분)<1임에 주의하여 정수 부분을 구한다.

약술 TIP

· n이 홀수인지 짝수인지, 그리고 거듭제곱근 안의 수의 부호가 양수, 0, 음수인지에 따라 실수의 개수를 빠르게 결정하여 계산에 대입합니다.
· 밑이 서로 다른 로그가 포함된 복잡한 연산에서는 밑 변환 공식을 우선 적용하여 밑을 통일시킨 후, 연산을 진행합니다.
· 로그 방정식을 풀기 전, 반드시 밑 조건과 진수 조건에서 도출되는 범위를 먼저 구하여 정답 선별의 기준으로 삼습니다.

유형 01 거듭제곱근과 실수

$2 \le n \le 20$ 인 자연수 n 에 대하여 $n^2-7n-18$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n 의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오.

논술 KEY

$n^2-7n-18$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하려면
① n 이 홀수일 때 $n^2-7n-18<0$,
② n 이 짝수일 때 $n^2-7n-18>0$ 이어야 한다.
(i) n 이 홀수일 때
$n^2-7n-18<0$ 에서
$(n+2)(n-9)<0$
$-2<n<9$
$\therefore\ n=3,\ 5,\ 7\ (\because\ 2 \le n \le 20)$
(ii) n 이 짝수일 때
$n^2-7n-18>0$ 에서
$(n+2)(n-9)>0$
$n<-2,\ n>9$
$\therefore\ n=10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\ (\because\ 2 \le n \le 20)$
(i), (ii)에 의하여 모든 n 의 값의 합은
$3+5+7+10+12+14+16+18+20=105$

답안	배점
① n 이 홀수일 때 $n^2-7n-18<0$ 서술하면 득점	3점
② n 이 짝수일 때 $n^2-7n-18>0$ 서술하면 득점	3점
③ $n=3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20$ 을 구하고 합 105 를 구하면 득점	4점

1

2 이상의 자연수 n에 대하여 $n-6$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때,

$$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(k)=15$$

를 만족시키는 자연수 k의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

2

$2 \le n \le 30$인 자연수 n과 어떤 정수 a에 대하여 두 집합

$$A=\{x \mid x\text{는 } a\text{의 } n\text{제곱근 중 실수}\},\ \ B=\{\sqrt[3]{-2}\}$$

가 $A-B=\varnothing$을 만족하도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, A는 공집합이 아니다.)

3

2 이상의 자연수 n에 대하여 $3^{n^2-4n-2}-27$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. 2 이상의 자연수 k에 대하여 $f(k)f(k+1)f(k+2)=0$인 k의 최댓값을 M, $f(k)f(k+1)f(k+2)=4$인 k의 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

4

2025 가천대

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$라 하자.

$2f_{n+1}(a^n)+(-1)^n\times f_n(f_{n+1}(a))$의 값이 최소일 때,

$$f_n(a)-3f_{n+1}(a^n)+f_{n+1}(|a|^n-a^n)$$

의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

유형 02 거듭제곱근이 자연수가 될 조건

2023 가천대

$x>0$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[7]{x^2}}$ 에 대하여 $\{f(f(n))\}^{49}$ 의 값이 1000 보다 큰 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

논술 KEY

$f(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[7]{x^2}}x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{7}}=x^{\frac{3}{14}}$ 이므로 $\{f(f(n))\}^{49}=\left\{\left(n^{\frac{3}{14}}\right)^{\frac{3}{14}}\right\}^{49}=\left\{n^{\frac{3}{14}\times\frac{3}{14}\times 49}\right\}=n^{\frac{9}{4}}$

$n^{\frac{9}{4}}$ 가 자연수가 되려면 n 은 자연수 k 에 대하여 $n=k^4$ 의 꼴이어야 한다.

즉, 자연수 n 은 2^4, 3^4, 4^4, $\cdots$ 의 자연수가 될 수 있는데 n 이 2^4 일 경우 $n^{\frac{9}{4}}=n^{4\times\frac{9}{4}}$, $2^9=512$ 이므로 1000 보다 작다.
따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 n 이 $3^4=81$ 이다.

답안	배점
① $\{f(f(n))\}^{49}=n^{\frac{9}{4}}$	4점
② $n=2^4,\ 3^4,\ 4^4,\ \cdots$	4점
③ 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 n 의 값은 $3^4=81$	2점

5

$\left(\sqrt[8]{n^{\sqrt{3}+1}}\right)^{\sqrt{3}-1}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 300 이하의 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하는 과정을 서술하시오.

6

2024 가천대

자연수 k 에 대하여 $\sqrt[n]{(2^k)^7}$ 의 값이 8 의 배수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 n 의 개수를 $f(k)$ 라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르는 과정을 서술하시오.

〈보 기〉

ㄱ. $f(7)=2$

ㄴ. $f(k)=2$ 를 만족시키는 5 이하의 k 의 개수는 2 이다.

ㄷ. $f(k)=5$ 를 만족시키는 10 이하의 모든 k 의 값은 24 이다.

MEMO

수학

1

문제로부터 $x^n = n-6$ 의 실근인 x 의 개수를 $f(n)$ 으로 정의했음을 알 수 있으므로 n 이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 푼다.

① n 이 홀수인 경우

$n-6$ 의 값에 관계없이 $x^n = n-6$ 을 만족하는 실근 x 의 개수는 1 개이다.

$\therefore f(3)=f(5)=f(7)= \cdots =1$

② n 이 짝수인 경우

(ⅰ) $n-6<0$ 일 때

$x^n <0$ 을 만족하는 실수 x 는 없다. 즉, $f(2)=f(4)=0$

(ⅱ) $n-6=0$ 일 때

$x^n =0$ 을 만족하는 실수 x 는 1개뿐이다. 즉, $f(6)=1$

(ⅲ) $n-6>0$ 일 때

$x^n = n-6$ 을 만족하는 실수 x 는 2 개이다. 즉,

$f(8)=f(10)=f(12)= \cdots =2$

이때

$0+1+0+1+1+1+2+1+2+1+2+1+2=15$

이므로 $f(2)+f(3)+f(4)+ \cdots +f(k)=15$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값은 14 이다.

답안		배점
①	$f(3)=f(5)=f(7)= \cdots =1$	2점
②	$f(2)=f(4)=0$	2점
③	$f(6)=1$	2점
④	$k=14$	4점

2

집합 A 는 공집합이 아니므로 적어도 하나의 원소를 갖고

$A-B=\varnothing$ 이므로 $A \subset B$이고,

$n(B)=1$ 이므로 $n(A)=1$

따라서 $A=B=\{\sqrt[3]{-2}\}$

이때 a 의 n 제곱근이 $\sqrt[3]{-2}$ 뿐이므로 $a<0$ 이고 n 은 홀수이다.

$n=3$ 일 때 $a=-2$

$n=9$ 일 때 $a=(-2)^3$

$n=15$ 일 때 $a=(-2)^5$

$n=21$ 일 때 $a=(-2)^7$

$n=27$ 일 때 $a=(-2)^9$

따라서 모든 n 의 값의 합은

$3+9+15+21+27=75$

답안		배점
①	$A=B=\{\sqrt[3]{-2}\}$ 를 언급하면 득점	3점
②	$n=3,\ 9,\ 15,\ 21,\ 27$	5점
③	75 를 구하면 득점	2점

3

$A_n = 3^{n^2-4n-2}-27$ 이라 하자.

$n^2-4n-2=3$ 에서

$n^2-4n-5=0$

$(n-5)(n+1)=0$

n 이 2 이상의 자연수이므로 $n=5$

$2 \le n<5$ 일 때, $n^2-4n-2<3$ 이므로 $A_n<0$

$n=5$ 일 때, $n^2-4n-2=3$ 이므로 $A_n=0$

$n>5$ 일 때, $n^2-4n-2>3$ 이므로 $A_n>0$

(ⅰ) n 이 짝수인 경우

$A_n<0$ 일 때 $f(n)=0$

$A_n=0$ 일 때 $f(n)=1$

$A_n>0$ 일 때 $f(n)=2$

(ⅱ) n 이 홀수인 경우

A_n 의 값에 관계없이 $f(n)=1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$f(n)=\begin{cases} 0 & (n=2 \text{ 또는 } n=4) \\ 1 & (n\text{이 } 3\text{ 이상의 홀수인 경우}) \\ 2 & (n\text{이 } 6\text{ 이상의 짝수인 경우}) \end{cases}$$

$f(k)f(k+1)f(k+2)=0$ 을 만족하는 k 는 $f(k),\ f(k+1),\ f(k+2)$ 중 적어도 하나가 0 이고 $f(n)=0$ 인 경우는 $n=2,\ 4$ 이다.

$k=2$ 일 때 $f(2)f(3)f(4)=0\cdot1\cdot0=0$

$k=3$ 일 때 $f(3)f(4)f(5)=1\cdot0\cdot1=0$

$k=4$ 일 때 $f(4)f(5)f(6)=0\cdot1\cdot2=0$

$k=5$ 일 때 $f(5)f(6)f(7)=1\cdot2\cdot1=2$

$k=6$ 일 때 $f(6)f(7)f(8)=2\cdot1\cdot2=4$

이므로 $f(k)f(k+1)f(k+2)=0$ 인 자연수 k 의 최댓값은 4,

$f(k)f(k+1)f(k+2)=4$ 를 만족하는 자연수 k 의 최솟값은 6 이다.

따라서 $M=4,\ m=6$ 이므로

$M+m=4+6=10$

답안		배점
①	$f(n)=\begin{cases} 0 & (n=2 \text{ 또는 } n=4) \\ 1 & (n\text{이 } 3\text{ 이상의 홀수인 경우}) \\ 2 & (n\text{이 } 6\text{ 이상의 짝수인 경우}) \end{cases}$ 를 구하면	4점
②	$M=4,\ m=6,\ M+m=10$	6점

4

실수 a 와 자연수 n 에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 계산한다.

(1) $a>0$ 이고 n 이 홀수일 때, $a^n>0$ 이므로 $f_{n+1}(a^n)=2$,

$f_{n+1}(a)=2,\ f_n(2)=1$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n)+(-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a))=3$

(2) $a>0$ 이고 n 이 짝수일 때, $a^n>0$ 이므로 $f_{n+1}(a^n)=1$,

$f_{n+1}(a)=1,\ f_n(1)=2$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n)+(-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a))=4$

(3) $a=0$ 이고 n 이 홀수일 때, $f_{n+1}(a^n)=1,\ f_{n+1}(a)=1$,

$f_n(1)=1$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n)+(-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a))=1$

(4) $a=0$ 이고 n 이 짝수일 때, $f_{n+1}(a^n)=1,\ f_{n+1}(a)=1$,

$f_n(1)=2$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n)+(-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a))=4$

(5) $a<0$ 이고 n 이 홀수일 때, $a^n<0$ 이므로 $f_{n+1}(a^n)=0$,

$f_{n+1}(a)=0,\ f_n(0)=1$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n)+(-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a))=-1$

(6) $a<0$ 이고 n 이 짝수일 때, $a^n>0$ 이므로 $f_{n+1}(a^n)=1$,

$f_{n+1}(a)=1,\ f_n(1)=2$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n)+(-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a))=4$

따라서 $a<0$ 이고 n 이 홀수일 때, 최솟값 -1 이고, 이때,

$a^n<0$ 이므로 $f_n(a)=1,\ f_{n+1}(a^n)=0$,

$f_{n+1}(|a|^n-a^n)=f_{n+1}(-2a^n)=2$ 이다.

따라서 $f_n(a)-3f_{n+1}(a^n)+f_{n+1}(|a|^n-a^n)=3$ 이다.

	답안	배점
①	$f_{n+1}(a^n)=0$	3점
②	$f_{n+1}(\lvert a\rvert^n-a^n)=2$	4점
③	$f_n(a)-3f_{n+1}(a^n)+f_{n+1}(\lvert a\rvert^n-a^n)=3$	3점

5

$$\left(\sqrt[8]{n^{\sqrt{3}+1}}\right)^{\sqrt{3}-1}=\left(n^{\frac{\sqrt{3}+1}{8}}\right)^{\sqrt{3}-1}$$
$$=n^{\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{8}}$$
$$=n^{\frac{1}{4}}$$

따라서 이 값이 자연수가 되기 위해서는 n 이 어떤 자연수의 네제곱인 수가 되어야 하므로

300 이하의 자연수 n 의 값은 $1,\ 16,\ 81,\ 256$ 이다.

따라서 모든 n 의 값의 합은

$1+16+81+256=354$

	답안	배점
①	$\left(\sqrt[8]{n^{\sqrt{3}+1}}\right)^{\sqrt{3}-1}=n^{\frac{1}{4}}$	4점
②	$n=1^4,\ 2^4,\ 3^4,\ 4^4$	4점
③	조건을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은 354	2점

6

$\sqrt[n]{(2^k)^7}$ 의 값이 8 의 배수가 되기 위해서는 $2^{\frac{7k}{n}}$ 에서 $\frac{7k}{n}=m$ 이 3 이상의 자연수이어야 한다.

$k=1$ 일 때, $2^{\frac{7\times1}{n}}=2^m$ 을 만족하는 2 이상의 자연수 n 은 없으므로 $f(k)=0$

$k=2$ 일 때, $n=2 \quad \therefore\ f(k)=1$

$k=3$ 일 때, $n=3,\ 7 \quad \therefore\ f(k)=2$

$k=4$ 일 때, $n=2,\ 4,\ 7 \quad \therefore\ f(k)=3$

$k=5$ 일 때, $n=5,\ 7 \quad \therefore\ f(k)=2$

$k=6$ 일 때, $n=2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 14 \quad \therefore\ f(k)=5$

$k=7$ 일 때, $n=7 \quad \therefore f(k)=1$

$k=8$ 일 때, $n=2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 14 \quad \therefore\ f(k)=5$

$k=9$ 일 때, $n=3,\ 7,\ 9,\ 21 \quad \therefore\ f(k)=4$

$k=10$ 일 때, $n=2,\ 5,\ 7,\ 10,\ 14 \quad \therefore\ f(k)=5$

따라서

$k=6,\ 8,\ 10$

이므로 모든 $k=6,\ 8,\ 10$ 의 합은 24

	답안	배점
①	ㄱ. $f(7)=1$	2점
②	ㄴ. $k=3,\ 5$ (또는 $f(3)=2,\ f(5)=2$)	3점
③	ㄷ. $k=6,\ 8,\ 10$ (또는 $f(6)=5,\ f(8)=5,\ f(10)=5$)	4점
④	옳은 것은 ㄴ, ㄷ	1점

7

$\log_{x^2}(-x^2+4x+32)$ 의 밑의 조건에 의하여

$x^2>0,\ x^2\neq1 \quad \cdots ㉠$

진수의 조건에 의하여

$-x^2+4x+32>0,\ x^2-4x-32<0$

$(x+4)(x-8)<0$

$-4<x<8 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 만족시키는 정수 x 는

$-3,\ -2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$

이고, 그 개수는 8 이다.

	답안	배점
①	$x^2>0,\ x^2\neq1$ (밑 조건), $-4<x<8$ (진수 조건) (각 2.5점)	5점
②	$x=-3,\ -2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$	4점
③	정수 x 의 개수 8	1점

8

$\log_{(8-a)^2}(2ax^2+2ax+11)$ 에서

(i) 밑의 조건

$(8-a)^2>0,\ (8-a)^2\neq1$

$\therefore\ a\neq8,\ a\neq7,\ a\neq9$

(ii) 진수의 조건

모든 실수 x 에 대하여 $2ax^2+2ax+11>0$ 이므로

① $a=0$ 일 때

$11>0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

② $a\neq0$ 일 때

$a>0$ 이고 이차방정식 $2ax^2+2ax+11=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-22a<0$

$a(a-22)<0$

$\therefore\ 0<a<22$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위는

$0\leq a\leq6$ 또는 $10\leq a<22$

이므로 정수 a 의 개수는 19 이다.

	답안	배점
①	밑의 조건으로부터 $a\neq8,\ a\neq7,\ a\neq9$ 을 구하면 득점	3점
②	진수의 조건으로부터 $0\leq a<22$ 를 구하면 득점	5점
③	조건을 만족시키는 정수 a 의 개수 19 를 구하면 득점	2점